Relativistiske effekter i GNSS

Olav Mathisen

Olav Mathisen: Relativistic effects in GNSS

KART OG PLAN, Vol. 73, pp. 64–68, POB 5003, NO-1432 Ås, ISSN 0047-3278

This short article provides an overview of relativistic effects in GPS. First I present and discuss some theory for calculating the effects. I provide an example of calculation of corrections for satellite clocks. And I provide an outline of how the basic Schwarzschild metric for calculating corrections is derived from Einstein's field equations.

Key words: relativistic effects, satellite clock corrections, Schwarzschild metric

Olav Mathisen, professor emeritus, Department of Mathematical Sciences and Technology, Norwegian University of Life Sciences, P.O. Box 5003, NO-1432 Ås. E-Mail: olav.mathisen@umb.no

Dette foredraget refererer til GPS (Global Positioning System) som en typisk representant for GNSS (Global Navigation Satellite System). Satellittene har fine atomklokker, og observatørene har også klokker, om ikke så fine. Dermed kan vandringstiden for signaler fra satellittene måles og avstandene til satellittene finnes ved å gange med lyshastigheten og påføre nødvendige korreksjoner. Ut fra avstandene kan posisjonen til mottakeren beregnes når satellittenes posisjoner er kjent. Men det er mye som influerer på målingene, herunder relativistiske effekter. De utgjør fra mange meter ned til brøkdel av millimeter. Bare ved måling samtidig i en kjent stasjon i nærheten slipper en å tenke på relativistiske effekter.

Relativistiske effekter i GPS

La oss følge et signal fra en satellitt til en mottaker. Her er en oversikt over aktuelle relativistiske effekter.

1. Satellittklokken

Det er vanlig å skille mellom effekter for en sirkulær bane i konstant potensial og virkning av baneeksentrisitet. Både potensialet der satellitten beveger seg, og farten spiller inn. Satellittklokkene er korrigert før oppskyting for effektene i sirkulær bane i konstant potensial. Virkningen av eksentrisiteten er derimot ikke korrigert i satellitten. Denne korreksjonen dominerer og kan tilsvare opptil et par 10-metere på avstanden.

2. Vandringstiden fra satellitt til mottaker

Den mest dominerende korreksjonen skyldes bevegelse av mottakeren mens signalet er underveis og kan tilsvare flere 10-metere for mottakere på jorden (Sagnac-effekt). Slik bevegelse kommer både fra jordrotasjonen og fra eventuell bevegelse av mottakeren relativt jorden. Hvis mottakeren befinner seg i en annen satellitt, kan korreksjonen på vandringstiden tilsvare opptil flere hundre meter på avstanden.

3. Sekundære effekter

Et par små effekter blir dels brukt, dels neglisjert:

- Quadrupole moment (andre grads harmonisk funksjon av jordpotensialet):
  Dette skyldes jordens flattrykning og fører til at potensialet varierer langs en satellittbane. Korreksjonen varierer med en amplitude på vel 2 cm.
- Shapiro-effekt (forsinkelse av satellittsignalet i jordens gravitasjonsfelt) Korreksjonen ligger på cm-nivå.

Flere små effekter kan bli følbare hvis atomklokkene blir mer nøyaktige.

Beregning av relativistiske effekter

Her nytter det ikke med gamle fysikkbøker som vi har trodd på som bibelen! Vi har hørt at klokker i fart tikker saktere sett fra jorda, men hvordan virker potensialet inn? Til trøst så er det en spesiell ligning som går igjen i beregning av relativistiske effekter: Schwarzschilds linjeelement (også kalt Schwartzschilds metrikk). Ved første øyekast ser ligningen komplisert ut. Men fortvil ikke! Ved nærmere ettersyn så fungerer den som en kokebok for beregning av relativistiske korreksjoner.

$$ds^2 = -(1+2\cdot\frac{\Phi}{c^2})\cdot c^2\cdot dt^2 + (1+2\cdot\frac{\Phi}{c^2})^{-1}\cdot dr^2 + r^2\cdot d\theta^2 + r^2\cdot\sin^2\theta\cdot d\varphi^2 \qquad (1)$$

Her er: ds = linjeelement i tid-rommet
Φ = gravitasjonspotensialet
c = lyshastigheten i vakuum i et inertialsystem
t = tiden knyttet til et valgt referansesystem (engelsk: coordinate time)
r, θ, φ = polarkoordinater (avstand fra origo, vinkel fra polen, vinkel i ekvatorplanet)

Til vårt bruk legger vi et aksesystem med origo i jordens massesentrum. Polaksen kan være parallell med jordens hovedtreghetsakse eller innta en skrå stilling. Tiden t i (1) lar vi være som i et ikke-gravitasjonsfelt. Vi kan tenke oss den representert ved en standard atomklokke i det uendelig fjerne.

Slik ligning (1) står, er aksesystemet ikkeroterende. Men vi kan lage et roterende system av (1), for eksempel et system festet til jorden, ved å sette

$$\varphi = \omega\cdot t + \varphi_r\ ,$$

der ω er jordens vinkelhastighet og φ_r er vinkel i ekvatorplanet. Dette avledede systemet kalles et sfærisk roterende system.

Ligningen kan settes opp for ethvert legeme i tid-rommet, for eksempel en satellitt. Vi tenker oss at materielle legemer er utstyrt med en standard atomklokke. Φ er potensialet der legemet befinner seg, og polarkoordinatene angir legemets posisjon. Og så gjelder

$$ds^2 = -c^2\cdot d\tau^2 \qquad (2)$$

hvor τ er hva legemets klokke viser. Dette virker høyst merkverdig, men henger sammen med at linjeelementet ds er invariant for valg av koordinatsystem og også kan uttrykkes i legemets tidssystem τ. For elektromagnetiske signaler er ds lik null.

Vi ser at ligning (1) relaterer klokketiden τ til systemtiden t, nettopp det vi trenger for å finne de relativistiske korreksjonene. Og vi ser hvordan potensialet Φ virker inn og hvordan legemets fart, gitt ved dr, $d\theta$ og $d\varphi$, medvirker. Dermed er vi klare til å gå løs på de relativistiske korreksjonene. Vi rekker ikke så mye i dette foredraget, men vi skal ta et konkret eksempel for å bli litt fortrolig med bruk av Schwarzschilds metrikk.

PS. Det finnes en annen metrikk, kalt sfærisk isotropisk, med et linjeelement som ligner på ligning (1):

$$ds^2 = -(1+2\cdot\frac{\Phi}{c^2})\cdot c^2\cdot dt^2 + (1-2\cdot\frac{\Phi}{c^2})\cdot(dr^2 + r^2\cdot d\theta^2 + r^2\cdot\sin^2\theta\cdot d\varphi^2)$$

Den skiller seg fra (1) bare ved ledd av størrelsesorden c^{-4}. Den og (1) kan brukes om hverandre. Den siste parentesen kan uttrykkes ved hastigheten, det kan være en forenkling.

Eksempel

La oss regne de relativistiske korreksjonene for klokken i en GPS-satellitt i sirkulær bane. Vi kan starte med et ikke-roterende referansesystem med polakse loddrett på baneplanet. Linjeelementet (1) forenkles da ved at $dr = d\theta = 0$ og $\sin\theta = 1$. Dessuten setter vi $ds^2 = -c^2 d\tau^2$ fra ligning (2). Vi får

$$-c^2\cdot d\tau^2 = -(1+2\cdot\frac{\Phi}{c^2})\cdot c^2\cdot dt^2 + r^2\cdot d\varphi^2$$

Tiden t lar vi fortsatt gjelde for en atomklokke i det uendelig fjerne, som i (1). I det siste leddet er $rd\varphi$ baneelementet $v\cdot dt$, hvor v er banehastigheten for satellitten. v finnes av akselerasjonen v^2/r i sirkelbevegelsen. Akselerasjonen er også lik gradienten til potensialet, så vi får $v^2/r = GM/(r^2)$ som gir $v^2 = GM/r = -\Phi$. G er gravitasjonskonstanten og M massen rundt origo. Dermed blir

$$d\tau^2 = (1+2\cdot\frac{\Phi}{c^2})\cdot dt^2 + \frac{\Phi}{c^2}dt^2 = (1+3\cdot\frac{\Phi}{c^2})\cdot dt^2$$

og ved å ta roten,

$$d\tau = (1 + 3 \cdot \frac{\Phi}{2 \cdot c^2}) \cdot dt \qquad (3)$$

Her er brukt første ledd av en rekke for å ta roten, men neste ledd er av størrelsesorden c^{-4} og kan neglisjeres. Vi ser allerede hvordan satellittklokken avhenger av potensialet Φ. Dess større potensial, dess fortere går satellittklokken ($d\tau$) i forhold til systemtiden (dt).

Det gjenstår bare å gå over fra det referansesystemet vi har benyttet, til det jordfaste systemet hvor tiden regnes i internasjonal atomtid (TAl), som er realisert ved standard atomklokker på geoiden. Denne overgangen finner vi ved å bruke det sfærisk roterende systemet som nevnt på forrige side, på en atomklokke i ro på geoiden. Da er $dr = d\theta = d\varphi = 0$. Det forenkler ligningen. Ved ordning finner vi

$$d\tau_{ref} = (1 + \frac{\Phi_0}{c^2}) \cdot dt$$

Her er τ_{ref} hva atomklokken viser, og det er nettopp internasjonal atomtid (TAl), kall den t'. Φ_0 er det kombinerte gravitasjons- og rotasjonspotensialet på geoiden. Ved omvending av den siste ligningen får vi

$$dt = (1 - \frac{\Phi_0}{c^2}) \cdot dt'$$

Ved innsetting for dt i (3) og multiplisering av parentesene får vi den endelige ligning,

$$d\tau = (1 + 3 \cdot \frac{\Phi}{2 \cdot c^2} - \frac{\Phi_0}{c^2}) \cdot dt'$$

De to siste leddene i parentesen er den relativistiske korreksjonen. Den utgjør 0.004567 Hz og forkorrigeres på satellittklokkene før oppsending.

Einsteins feltligninger

Nå kommer vi til det som er mest spennende. Hvordan utledes Schwarzschild-metrikken? Vi bør kjenne litt til utledningen for å vite begrensningene og unngå fallgruver. Det er ingen lettvint snarvei til målet. Vi må helt tilbake til Einsteins forbløffende grunntanker om tid og rom:

- Tiden, sammen med tre romlige koordinater, danner et firedimensjonalt rom som krummes av masse og energi.
- Det finnes ingen tyngdekraft. Frie legemer beveger seg uten noen påvirkning langs geodetiske linjer i tid-rommet.

Disse grunntankene munner ut i det som kalles Einsteins feltligninger. De forbinder masse og energi med tid-rommets krumning. Einstein uttrykte masse og energi ved en såkalt «Energy-momentum» tensor $T_{\mu\nu}$ (også bare kalt energi-tensoren). På matriseform ser den slik ut:

$$T_{\mu\nu} = \rho \cdot [v_x \quad v_y \quad v_z \quad c]^T \cdot [v_x \quad v_y \quad v_z \quad c] + P$$

Her betyr ρ tetthet, og v betyr hastighet i henholdsvis x, y og z-retning. c er lyshastigheten, og P er en 4x4-matrise med trykkene p_x, p_y, p_z, som de tre første diagonalelementene og null ellers.

$T_{\mu\nu}$, må så relateres til en krumningstensor av samme dimensjon. Riemanns krumningstensor, $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ som er vel kjent fra matematikken, er 4-dimensjonal med $4^4 = 256$ ledd for tid-rommet. Ved summasjon etter et bestemt mønster (i tensorregningen kalt kontraksjon) dannes Riccis krumningstensor $R_{\mu\nu}$, som representeres av en 4x4-matrise. Kunne det tenkes at feltligningene hadde den enkle form,

$$\kappa \cdot T_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}$$

κ er her en proporsjonalitetskonstant. Her kommer det i betraktning at bevaring av energi og momenter krever at $R_{\mu\nu}$ har null divergens. Har $R_{\mu\nu}$ det? Dessverre nei. Divergensen viser seg å være $1/2 \cdot g_{\mu\nu} \cdot R$ hvor $g_{\mu\nu}$ er metrisk tensor. Den består av koeffisientene i linjeelementet. R, kalt krumningskonstanten, er lik summen av diagonalleddene i

$$R^{\mu}_{\nu} = g^{\mu\sigma} \cdot R_{\sigma\nu}$$

Dette er et eksempel på kontraksjon. $g^{\mu\sigma}$ er, på matriseform, invers av $g_{\sigma\nu}$. Einstein subtraherte divergensen fra $R_{\mu\nu}$, slik at han fikk en tensor med null divergens.

Den endelige ligning blir dermed

$$\kappa \cdot T_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \cdot g_{\mu\nu} \cdot R \tag{4}$$

Konstanten κ viser seg ved sammenligning med Newtons gravitasjonsteori i et svakt gravitasjonsfelt å være $8\pi G/c^4$. Dette er de berømte Einsteins feltligninger.

Utledning av Schwarzschilds linjeelement

Det er en løsning av Einsteins feltligninger for et spesielt tilfelle: For det tomme rom utenfor en sfærisk symmetrisk massekropp. Først gis feltligningene (4) en litt annen form som er hensiktsmessig i dette tilfelle. Vi bruker kontraksjon slik vi gjorde for å finne R i ligning (4). Det gir konstanten T for $T_{\mu\nu}$, R for $R_{\mu\nu}$, og 4 for $g_{\mu\nu}$. Vi får

$$\kappa \cdot T = R - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot R = -R$$

Innsetting for R i ligning (4) gir så

$$R_{\mu\nu} = \kappa \cdot (T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \cdot g_{\mu\nu} \cdot T)$$

I det tomme rom er $T_{\mu\nu}$ og dermed også T, lik null, så feltligningene forenkles til

$$R_{\mu\nu} = 0 \tag{5}$$

Det gjelder å finne en metrikk som tilfredsstiller (5). Vi antar det tilsvarende linjeelementet har formen

$$\begin{aligned} ds^2 &= e^{\lambda} \cdot dr^2 + r^2 \cdot d\theta^2 + r^2 \cdot \sin^2\theta \cdot d\varphi^2 \\ &- e^{\nu} \cdot c^2 \cdot dt^2 \end{aligned} \tag{6}$$

Dette minner om linjeelementet fra spesiell relativitet, men her supplert med to funksjoner, e^{λ} og e^{ν}. Jobben blir nå å finne disse funksjonene. Både λ og ν er funksjoner av r. Logisk finnes først Riemanns krumningstensor. Den er sammensatt av såkalte Christoffelsymboler som igjen inneholder deriverte av leddene i metric tensor. Den er i dette tilfelle diagonal med leddene e^{λ}, r^2, $r^2\sin^2\theta$ og $-e^{\nu}$.

Av Riemann-tensoren finnes Ricci-tensoren ved kontraksjon, som under utledning av feltligningene. Det viser seg at Ricci-tensoren blir diagonal i dette tilfelle. Derved blir feltligningene (5) opphav til fire 2.ordens differensialligninger for λ og ν, en ligning for hvert diagonalledd.

Vi rekker ikke detaljene i dette foredraget, men det kan nevnes at summen av første og fjerde ledd av Ricci-tensoren gir en enkel relasjon mellom de deriverte λ' og ν' med hensyn på r:

$$R_{11} + R_{44} = \frac{\lambda'}{r} + \frac{\nu'}{r} = 0$$

Dette gir $\lambda' + \nu' = 0$, som medfører $(\lambda + \nu)' = 0$ og dermed $\lambda + \nu$ = konstant. Denne konstanten må være null, for lar vi r gå mot uendelig, mot null gravitasjon, vil linjeelementet nærme seg det vi kjenner fra spesiell relativitet. Og det er (6) med $\lambda = \nu = 0$, så $\lambda + \nu = 0$. Dermed blir $\lambda = -\nu$.

Det gjenstår å finne ν. Det kan gjøres ved å ta den 2.deriverte av r med hensyn på t og sammenligne med gravitasjonen $GM/(r^2)$. Derivasjonene må gjøres i tid-rommet, og det krever en del regning, så her må vi nøye oss med å angi resultatet,

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{-c^2}{2} \cdot e^{2\nu} \cdot \nu' = -\frac{G \cdot M}{r^2}$$

Den siste ligningen kan skrives

$$(e^{2\nu})' = \frac{4 \cdot G \cdot M}{c^2 \cdot r^2}$$

og ved integrasjon,

$$e^{2\nu} = C - \frac{4 \cdot G \cdot M}{c^2 \cdot r}$$

hvor C er en integrasjonskonstant. For å finne denne lar vi r gå mot uendelig. Linjeelementet (6) nærmer seg da det vi kjenner fra spesiell relativitet, hvor $\nu = 0$, mens siste ledd ovenfor går mot null. Dermed blir C = 1.

Setter vi inn for C ovenfor og tar roten på begge sider blir

$$e^{\nu} = 1 - \frac{2 \cdot G \cdot M}{c^2 \cdot r} = 1 + \frac{2 \cdot \Phi}{c^2}$$

Setter vi dette inn i (6) og husker at $\lambda = -\nu$, får vi Schwarzschilds linjeelement,

$$ds^2 = (1 + \frac{2 \cdot \Phi}{c^2})^{-1} \cdot dr^2 + r^2 \cdot d\theta^2 + r^2 \cdot$$
$$\sin^2 \theta \cdot d\varphi^2 - (1 + \frac{2 \cdot \Phi}{c^2}) \cdot c^2 \cdot dt^2$$

Slutning

Lar vi nå tanken gå tilbake til våre GPS-målinger, så ser vi at vi har ingen eksakt løsning for de relativistiske korreksjonene. Jordens massefordeling er mer komplisert enn det som forutsettes i Schwarzschild-metrikken. Men den er det beste vi har til vårt formål, og har hittil vist seg å fungere tilfredsstillende. Et ønskemål er å kunne løse Einsteins feltligninger for en flattrykt jord. Ligningene er gitt med få symboler, men de tilhørende differensialligningene er uhyre kompliserte å løse, og det er gjort i bare få tilfeller.

Litteratur

Ashby, N. and J. J. Spilker (1995). Introduction to Relativistic Effects on the Global Positioning System. American Institute of Aeronautics and Astronautics,lnc.

Grøn, Ø. and A. Næss (2007). Einsteins Theory. Springer New York Dordrecht Heidelberg London.

Moritz, H. and B. Hofmann-Wellenhof (1993). Geometry, Relativity, Geodesy. Karlsruhe: Wichmann