

# Gauss-Krüger-projeksjonen ved analytiske funksjoner

Helge Graffer

Vitenskapelig bedømt (refereed) artikkel

*Helge Graffer: The Gauss-Krüger projection by analytic functions*

KART OG PLAN, Vol. 71, pp. 39–44, P.O.B. 5003, NO-1432 Ås, ISSN 0047-3278

Gauss-Krüger is a widely used map projection. The classical method of calculating coordinates is accurate for areas close to the central meridian. If global coverage is needed we can use the method of analytic functions. The article describes how to use this method to go from ellipsoid to map and vice versa. The calculation goes via the complex variables, mercator variable and complex latitude. The article also gives formulas for scale and meridian convergence as functions of complex latitude.

*Keywords:* Map projections, Gauss-Krüger, analytic functions

*Helge Graffer, Norkart Geoservice AS, Postboks 145, NO-1300 Sandvika. E-mail: helge.graffer@nkgs.no*

## Innledning

Gauss-Krüger er trolig verdens mest brukte kartprojeksjon (Snyder 1984).

De offisielle koordinatsystemene for Norges fastland er alle av denne typen. Det gjelder både EUREF89/UTM, EUREF89/NTM og de gamle NGO1948-systemene.

Det finnes flere metoder for beregning av koordinater. Her er noen:

1. Den klassiske metoden med bruk av Taylor-rekke.
2. Metoden med hyperbolske funksjoner.
3. Metoden med analytiske funksjoner.

Metode 1 har nøyaktighet tilpasset normal bruk, det vil si at den med millimeters nøyaktighet kan brukes innenfor en UTM-sone, altså 3 grader til hver side av sentralmeridianen. Lenger ut øker feilen fort. Det er vanlig å ta med leddene inntil grad 6 i Taylor-rekka. Hvis flere ledd tas med kan bruksområdet utvides. Dette er den mest kjente metoden.

Metode 2 bruker en rekke med hyperbolske funksjoner. Hvis en tar med leddene med inntil tredje grad av flattrykningen kan metoden brukes minst 30 grader til hver side (sfærisk avstand). Dette er nok til å dekke de fleste formål. Ved flere ledd økes nøyaktigheten og bruksområdet ytterligere.

Metode 3 kan brukes globalt. Koordinater kan beregnes med god presisjon for hele ellipsoiden (Lee 1976).

Hvilken metode en skal basere seg på er et spørsmål om nøyaktighet og tidsforbruk. Den som baserer seg på den klassiske metoden må være klar over at beregningen har store feil i tilfeller utover det normale. Metoden med de hyperbolske funksjonene er vesentlig bedre. Nøyaktigheten er best for metoden med de analytiske funksjonene. Den kan holde for hele ellipsoiden iflg. Lee (1976). Tidsforbruket er også størst for denne metoden, men med dagens datamaskiner har det mindre betydning. Et dataprogram laget av forfatter kan beregne 100 000 punkter per sekund på en vanlig PC, og det holder for de fleste formål.

Denne artikkelen tar for seg beregning av Gauss-Krüger etter metoden med analytiske funksjoner. Teorien ble først vist i 1945 av E.H.Thompson, men den ble ikke publisert. Algoritmene som presenteres her bygger på (Klotz 1993). Klotz presenterte formler for ellipsoide til kartplan og tilbake. Beregningen går via de komplekse variablene mercatorvariabel og kompleks bredde.

Videre er det med et avsnitt om målestokk og meridiankonvergens. Jeg kjenner ikke til at disse formlene er publisert tidligere.

**Konform avbildning**

En transformasjon er konform dersom alle vinkler bevares. En annen egenskap er at målestokken i ett punkt blir den samme i alle retninger. Fra matematikken har vi følgende setning:

*Enhver kompleks funksjon avbilder konformt i de områder funksjonen er deriverbar og den deriverte er forskjellig fra 0. En slik funksjon er en analytisk funksjon.*

Den deriverte til funksjonen beskriver målestokk og rotasjon for avbildingen. Hvis den deriverte i et punkt er det komplekse tallet  $\omega$ , er målestokk ( $m$ ) og rotasjon ( $\gamma$ ) i punktet gitt ved (Mathisen 1990, side 31–32):

$$m = |\omega|$$

$$\gamma = \arg(\omega)$$

Dette skal nå brukes for å finne en metode for Gauss-Krüger.

**Gauss-Krüger**

Gauss-Krüger-projeksjonen er gitt ved følgende betingelser:

1. Det skal være en konform projeksjon.
2. Sentralmeridianen skal være en rett linje som avbildes i riktig lengde, altså med målestokk lik 1 hele veien.

Framgangsmåten blir å velge et konformt utgangspunkt, og deretter gjøre konforme operasjoner og sørge for at sentralmeridianen får riktig målestokk. Områdene utenfor sentralmeridianen trenger man ikke tenke på. De blir riktig når konformiteten ivaretas.

Følgende størrelser er involvert:

- $a$ : Ellipsoidens lange halvakse  
 $f$ : Ellipsoidens flattrykning  
 $e$ : Ellipsoidens eksentrisitet  
 $\varphi$ : Geodetisk bredde  
 $\lambda$ : Geodetisk lengdeforskjell i forhold til sentralmeridian  
 $M$ : Meridiankrumningsradius  
 $N$ : Normalkrumningsradius  
 $B$ : Meridianbuelengde fra ekvator  
 $q$ : Isometrisk bredde  
 $w$ : Mercatorvariabel

- $b$ : Kompleks bredde  
 $z$ : Komplekse koordinater i kartplanet for enhetsellipsoide ( $a=1$ )  
 $x, y$ : Nord og østkoordinat i kartplanet  
 $m$ : Målestokk  
 $\gamma$ : Meridiankonvergens

To sammenhenger er sentrale i utledningen:

- Sammenhengen mellom geodetisk og isometrisk bredde.
- Sammenhengen mellom geodetisk bredde og meridianbuelengde.

Sammenhengene kan illustreres slik:

$$q \leftrightarrow \varphi \leftrightarrow B$$

Hvis dette er sammenhenger på sentralmeridianen, kan de generaliseres til å gjelde hele ellipsoiden. Da får vi:

$$w \leftrightarrow b \leftrightarrow a \cdot z$$

Sammenhengene er gitt med de samme funksjonene, men i det generaliserte tilfellet er funksjonene komplekse.

**Sammenhengen mellom geodetisk og isometrisk bredde**

Meridiankrumningsradius og normalkrumningsradius for ellipsoiden er gitt ved følgende formler (Mathisen 1990):

$$M = a(1 - e^2)(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-3/2}$$

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$$

Isometrisk bredde er en viktig størrelse i utledningen av standard Mercator-projeksjon. Mercator er også en konform kartprojeksjon og i sin enkleste form er koordinatene gitt ved følgende formler:

$$x_m = a \cdot q$$

$$y_m = a \cdot \lambda$$

Isometrisk bredde tilsvarer dermed x-koordinaten i Mercator for enhetsellipsoiden.

Isometrisk bredde er gitt ved følgende integral (Klotz 1993):

$$q = \int \frac{M}{N \cos \varphi} d\varphi$$

$$= \int \frac{1 - e^2}{\cos \varphi (1 - e^2 \sin^2 \varphi)} d\varphi \quad (1)$$

Løsningen er gitt ved:

$$q = \tanh^{-1}(\sin \varphi) - e \tanh^{-1}(e \sin \varphi) \quad (2)$$

Den inverse finnes ved iterasjon:

$$\varphi_0 = 0$$

$$\sin \varphi_{i+1} = \tanh(q + e \tanh^{-1}(e \sin \varphi_i)) \quad (3)$$

### Sammenhengen mellom geodetisk bredde og meridianbuelengde

Meridianbuelengden fra ekvator til bredde  $\varphi$  er gitt ved følgende integral (Mathisen 1990):

$$B = \int_0^\varphi M d\varphi$$

$$= a(1 - e^2) \int_0^\varphi (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}} d\varphi \quad (4)$$

Dette kan ikke løses eksakt, men det kan rekkeutvikles eller itereres på flere måter. Her presenteres en løsning. Utledning finnes i (Klotz 1993).

$$d_{n+1} = d_n \frac{(2n+1)(2n+3)}{(2n+2)(2n+2)} e^2, \quad d_0 = 1$$

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \quad (5)$$

$$k_{i+1} = k_i \frac{2i+2}{2i+3} \sin^2 \varphi, \quad k_0 = 1$$

$$E_\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \left( d_n \sum_{i=0}^{n-1} k_i \right) \quad (6)$$

$$B = a(1 - e^2) \left( (1 + E) \varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi E_\varphi \right) \quad (7)$$

E (og alle d-er) kan beregnes en gang for en ellipsoide.

Den inverse, det vil si å finne bredde fra meridianbuelengde, må itereres:

$$\varphi_0 = 0$$

$$\varphi_{i+1} = \frac{B}{a(1 - e^2)(1 + E)} + \sin 2\varphi_i \frac{E_{\varphi_i}}{2(1 + E)} \quad (8)$$

### Fra ellipsoide til kartplan

Starter med breddegrad og lengdeforskjell på ellipsoiden. Beregner så isometrisk bredde fra formel (2).

Det trengs en konform kartprojeksjon som utgangspunkt og denne må være representert ved en kompleks variabel. Her brukes mercatorvariabel. Den tilsvarende standard Mercator-projeksjon for en enhetsellipsoide ( $a=1$ ), og den er gitt ved:

$$w = q + i\lambda \quad (9)$$

Beregner så kompleks bredde. Det gjøres ved å bruke formel (3) generalisert til det komplekse plan. Geodetisk bredde erstattes av kompleks bredde og isometrisk bredde erstattes av mercatorvariabel:

$$b_0 = 0$$

$$\sin b_{i+1} = \tanh(w + e \tanh^{-1}(e \sin b_i)) \quad (10)$$

På sentralmeridianen, når  $w$  og  $b$  er reelle, er formlene (3) og (10) identiske.

Kompleks bredde representerer en konform kartprojeksjon der parallellsirkene skjærer sentralmeridianen med lik avstand. Målestokken varierer langs sentralmeridianen.

Beregner så komplekse kartplankoordinater  $z$ . Det gjøres ved å generalisere formlene (6 og 7) til det komplekse plan. Geodetisk bredde erstattes av kompleks bredde og meridianbuelengde erstattes av de komplekse kartplankoordinatene:

$$k_{i+1} = k_i \frac{2i+2}{2i+3} \sin^2 b, \quad k_0 = 1$$

$$E_b = \sum_{n=1}^{\infty} \left( d_n \sum_{i=0}^{n-1} k_i \right) \quad (11)$$

$$z = (1 - e^2) \left( (1 + E)b - \frac{1}{2} \sin 2bE_b \right) \quad (12)$$

Gauss-Krüger-koordinater finnes så fra ligningen:

$$a \cdot z = x + iy \quad (13)$$

### Fra kartplan til ellipsoide

Starter med komplekse kartplankoordinater  $z$ . Kompleks bredde finnes så ved å generalisere formel (8).

$$b_0 = 0$$

$$b_{i+1} = \frac{z}{(1 - e^2)(1 + E)} + \sin 2b_i \frac{E_{b_i}}{2(1 + E)} \quad (14)$$

Finner så mercatorvariabel ved å generalisere formel (2):

$$w = \tanh^{-1}(\sin b) - e \tanh^{-1}(e \sin b) \quad (15)$$

Lengdeforskjell og isometrisk bredde er gitt ved formel (9). Breddegrad finnes så fra formel (3).

### Målestokk og meridiankonvergens

Målestokk og meridiankonvergens er to viktige egenskaper for kartprosjeksjoner.

Målestokken er forholdet mellom en infinitesimal avstand i kartplanet og tilsvarende avstand på ellipsoiden. Målestokken er avhengig av posisjonen. For konforme kartprosjeksjoner er målestokken i et punkt den samme i alle retninger. For Gauss-Krüger er målestokken 1 langs sentralmeridianen og den øker med  $y$ -koordinaten.

Meridiankonvergens i et punkt er vinkelen mellom  $x$ -aksens parallell og meridianen. Den er også avhengig av posisjonen, men for konforme projeksjoner er alle retninger dreid like mye i et punkt. For Gauss-Krüger er meridiankonvergens 0 langs sen-

tralmeridianen og ekvator (nesten hele ekvator, se siste avsnitt og figur 1) og den øker med stigende bredde og lengdeforskjell.

For å utlede formler for målestokk og meridiankonvergens må de deriverte for de analytiske funksjonene finnes, jamfør avsnittet om konform avbildning.

Av ligning (1) ser vi at

$$\frac{dq}{d\varphi} = \frac{1 - e^2}{\cos \varphi (1 - e^2 \sin^2 \varphi)}$$

Tilsvarende blir:

$$\frac{dw}{db} = \frac{1 - e^2}{\cos b (1 - e^2 \sin^2 b)}$$

Av ligning (4) ser vi at

$$\frac{dB}{d\varphi} = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}$$

Tilsvarende blir:

$$\frac{dz}{db} = \frac{1 - e^2}{(1 - e^2 \sin^2 b)^{3/2}}$$

Videre:

$$\frac{dz}{dw} = \frac{dz}{db} \frac{db}{dw} = \frac{\cos b}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 b}} \quad (16)$$

I Mercator-prosjeksjonen er meridiankonvergens lik 0 og målestokken er gitt ved (Mathisen 1990):

$$m_m = \frac{a}{N \cos \varphi}$$

I Gauss-Krüger er dermed målestokk og meridiankonvergens gitt ved:

$$m = \frac{a}{N \cos \varphi} \left| \frac{dz}{dw} \right| \quad (17)$$

$$\gamma = -\arg\left(\frac{dz}{dw}\right) \quad (18)$$

Minustegnet sørger for at meridiankonvergensten blir positiv i første kvadrant.

**Numerisk eksempel:**

Hvis et punkt er nær sentralmeridianen blir det bra samsvar mellom de forskjellige metoder. Her velges et punkt langt ute der det klassiske formelverket blir veldig feil. De analytiske funksjonene kan regne fram og tilbake med nøyaktighet på brøkdelen av en millimeter.

Formlene konvergerer relativt raskt. Hvis lengdeforskjellen er mindre enn 60 grader holder det med 12 iterasjoner i alle formler. Da er forbedringene ubetydelige. Vanligvis kan iterasjonene avbrytes før.

Ellipsoide: WGS84 med

$$a = 6378137$$

$$1/f = 298.257223563$$

Punkt med bredde = 45 grader og lengdeforskjell = 45 grader:

$$\varphi = 0.785398163397$$

$$\lambda = 0.785398163397$$

Isometrisk bredde fra formel (2):

$$q = 0.876634653435$$

Mercatorvariabel:

$$w = 0.876634653435 + i0.785398163397$$

Bruker formel (10) for i finne kompleks bredde. Etter 8 iterasjoner er endringen for sin(b) mindre enn  $10^{-16}$  og vi får:

$$b = 0.957434667431 + i0.550046386543$$

For WGS84 kan E beregnes til:

$$E = 0.005052501788$$

Etter 10 iterasjoner med formel (11) er Eb konvertert til:

$$Eb = 0.005069048324 + i0.000013403476$$

Formel (12) gir

$$z = 0.951872611367 + i0.550248623214$$

Og formel (13) gir

$$x = 6071173.921846$$

$$y = 3509561.102920$$

Målestokk og meridiankonvergens, formler (16,17 og 18)

$$\frac{dz}{dw} = 0.667658888335 - i0.472636546472$$

$$m = 1.154914638989$$

$$\gamma = 0.616009141090 = 39.216360 \text{ gon}$$

**Avslutning**

Figur 1 viser Gauss-Krüger for hele ellipsoiden. Greenwich er sentralmeridian og gradnettet er på 15 grader.

Kartdataene er World Coast Line designed for 1:5.000.000 fra NOAA ([www.noaa.gov](http://www.noaa.gov)). De er transformert fra geodetiske koordinater til Gauss-Krüger.

Avbildingen er endelig for ellipsoiden (Lee 1976). Det er i motsetning til kula der øst- og vestpunktet har uendelig y-verdi.

Ekvator deler seg i to løsninger når:

$$\lambda = (1 - e) \frac{\pi}{2}$$

Formlene (10, 12, 14 og 15) konvergerer for nesten hele ellipsoiden. Nøyaktigheten er

nesten til siste siffer, det vil si en brøkdel av en millimeter.

Problemer oppstår i området der

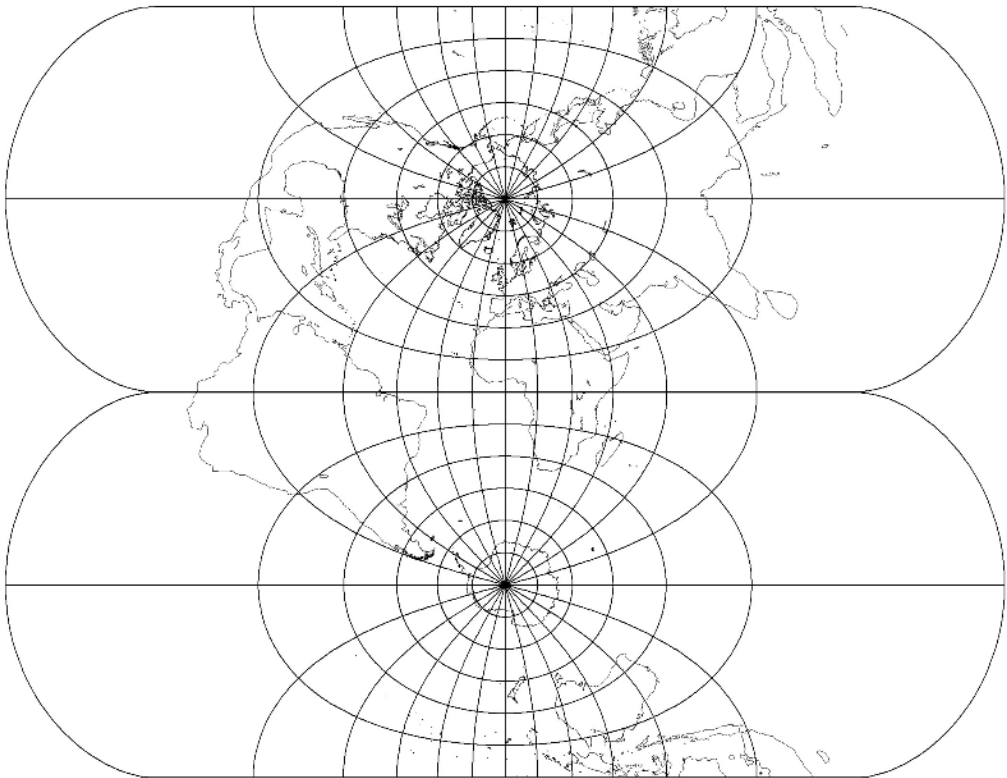
$$\lambda > 80^\circ \wedge \varphi < 10^\circ$$

Dette er det området som er lengst fra x-aksen i kartplanet. Gauss-Krüger lar seg beregne også her (Lee 1976), men da må formelene (10,12,14 og 15) endres på ett eller flere av følgende punkter:

- Bedre startverdier for iterasjon.
- Bruk Newtons metode for å løse  $w$  til  $b$  og  $z$  til  $b$ .
- Bruk Thompson-projeksjon (se Lee 1976) som mellomberegning i stedet for kompleks bredde.

### Referanseliste

- Klotz, Jürgen (1993): Eine analytische Lösung der Gauß-Krüger-Abbildung, *Zeitschrift für Vermessungswesen* 118, Heft 3, Konrad Wittwer Verlag, 106–116.
- Lee, L.P. (1976): Conformal Projections Based on Jacobian Elliptic Functions. *Cartographica*. Volume 13. Number 1/1976. Monograph 16. Toronto: University of Toronto Press.
- Mathisen, Olav (1990): *Den gaussiske projeksjon*. Ås-NLH: Institutt for landmåling.
- Snyder, John P. (1984): *Map Projections Used by the U.S. Geological Survey*. Geological Survey Bulletin 1532. Second Edition. Washington: United States Government Printing Office.



Figur 1: Gauss-Krüger for hele ellipsoiden. 15 graders gradnett.