Grovfeilsøk ved multippel testing med Students t-test og Fisher F-test

Inge Revhaug

Vitenskapelig bedømt artikkel[1]

Inge Revhaug: Outlier detection in multiple testing using Students t-test and Fisher F-test.

KART OG PLAN. Vol 67, pp. 101–107. P.O.Box 5003 NO-1432 Ås, ISSN 0047-3278

In Norway the standard testing procedure used to detect outliers has been the multiple Students t test. For independent observations where a gross error normally affects only one observation, the Students t test might be appropriate.

For satellite vectors all the elements in the vector might be affected by a gross error. For this reason, it should be better to test the whole vector using variance differences and F-distribution. The same reasoning may apply for transformed data.

Software for analysing surveying data should therefore include both methods.

Key words: Multiple testing. Testing vectors. Outlier detection.

Inge Revhaug, Professor. Department of Mathematical Sciences and Technology, UMB, P. O. Box 5003, NO-1432 Ås. E-mail: inge.revhaug@umb.no

Forord

I forbindelse med regning av et presist lokalt nett av vektorer ga testing av vektorene i en romlig utjevning ikke antydning om uteliggere[2], mens testing etter å ha regnet om til retningsvinkel, avstand og høydeforskjell ga et klart utslag på en retningsvinkel. Det viste seg å være en faglig uenighet om årsaken. Mitt syn er at dette er test av to forskjellige hypoteser, men opplevde å møte en tro på at hvis man bare tok hensyn til kovariansene mellom vektorkomponentene og gjorde en korrekt beregning ville test av vektoren i rommet og test av den omdannede vektoren gi samme resultat. Med denne artikkelen vil jeg vise at det siste ikke er tilfelle. Jeg vil også argumentere for å kombinere enkeltvis og gruppevis testing av observasjoner.

Innledning

Denne artikkelen behandler avsløring av uteliggere ved statistisk testing. I tillegg til avsløring av en uteligger i en måling (observasjon) er avsløring av flere uteliggere i samhørende målinger diskutert. En av de store utfordringer geomatikere står ovenfor er å identifisere dårlige målinger. Det antas at observasjonene i tillegg til eventuelle uteliggere, alltid er influert av tilfeldige normalfordelte feil.

Avsløring av uteliggere er et av de viktigste områdene innen statistikk, og flere metoder har blitt utviklet for dette formålet. Ved multippel t-test og datasnooping avdekkes uteliggere. Ved flere uteliggere kan testene kjøres iterativt.

En måling som ikke passerer den statistiske testen kan fjernes etter nærmere undersøkelse. Ved en minste kvadraters utjevning, vil gjenværende målinger av lav kvalitet lett

1. Fagredaktør Geir Harald Strand har administrert bedømmingen av artikkelen og forfatter er per i dag ikke kjent med hvilke to fagfeller som har utført vurderingen.
2. Min definisjon: En uteligger er et datapunkt som befinner seg langt fra resten av dataene. Eller om vi vil: En observasjon, som ikke passer sammen med de øvrige observasjonene. Gitt et middel og et standardavvik. Da forventer en statistisk fordeling at observasjonene skal falle innenfor et avgrenset område. De observasjonene som ikke gjør det benevnes uteliggere og bør kontrolleres.

redusere kvaliteten til estimerte parametere. Ulempen med minste kvadrater er at den tilpasser løsningen til alle målinger, inklusive de dårlige. Når så skjer kan man gjerne ha et inntrykk av at det er dårlige målinger med i utjevningen, men det er ikke alltid mulig å påvise hvilke de er. I tillegg er det en utfordring å avsløre mer enn en eller to simultant forekommende uteliggere i målingene. I denne undersøkelsen er basiskomponentene i en vektor (Δx, Δy og Δz) brukt som observasjoner. En simulering basert på et tredimensjonalt aksesystem er brukt for å vise effektene.

Grovfeiltesting ble bredt introdusert i Norge ved utviklingen av Gemini Nett/GPS i et NTNF støttet prosjekt på slutten av 1980 tallet av Viak, senere Asplan Viak AS. Her ble datasnooping etter Baarda og multippel t test tatt inn i programvaren for avdekking av statistiske uteliggere. Disse uteliggerne indikerer mulige grovfeil. Forutsetningen for disse testene var at det kun var en grovfeil til stede. I praksis kan det være flere, men er det i tallverdi flere omtrent like store uteliggere til stede, vil de ha en tendens til å skjule hverandre.

Ved måling med satellitt utgjør posisjonsforskjellen mellom to antenner en vektor i rommet. En slik vektor består av tre element. Elementene er ikke direkte målt, de er avledede størrelser. De originale målingene er fasedifferanser. Ved feil på en vektor er det ikke urimelig å anta at alle de tre vektorelementene kan være påvirket.

Vi kan skille mellom to grupper grovfeil. Den ene gruppen er feil relatert til selve vektoren. Typiske eksempler er feil fastsetting av flertydighetene (engelsk: ambiguities) og effekten av flerveisinterferens (engelsk: multipath). Den andre gruppen er feil gjort i terrenget. Et typisk eksempel er en grovfeil i måling av antennehøyde. En feil i antennehøyden kommer lettest til syne etter at vektoren er rotert til horisontplanet, og avsløres da greit ved datasnooping eller multippel t. Ved feil fastsetting av flertydighetene er derimot neppe enkeltvis testing av vektorelementene den beste metoden, siden alle tre element normalt vil være påvirket.

Ved måling med totalstasjon måles også en vektor. Totalstasjonen er et vektormeter. Vi registrerer retning, avstand og vertikalvinkel. Vi oppfatter gjerne retningene, avstandene og vertikalvinklene som uavhengige størrelser. Her gir det mer mening å teste målingene enkeltvis.

Når vektoren testes som et hele er det naturlig å se på endring i feilkvadratsum. Når vi tester enkeltmålinger hver for seg ser vi på estimert størrelse av en mulig grovfeil. Formelverket for beregningen kan være praktisk talt likt, men testene blir forskjellige. For å teste enkeltmålinger kan vi bruke Students t fordeling, for å teste grupper av målinger en Fisher F fordeling.

Students t-fordeling

Students t-fordeling ble utviklet av William S. Gosset og publisert i 1908. Dette er en statistisk fordeling som tar for seg estimering av middeltall ved få normalfordelte observasjoner. For statistiske fordelinger og testing, se for eks. Høyland [1] eller Koch [4]. Størrelsen t gitt ved følgende formel er t-fordelt:

$$t = \frac{\bar{x}_n - \mu}{s_n} \tag{1}$$

Her er $\bar{x}_n$ gjennomsnittet av n statistisk uavhengige og like nøyaktige normalfordelte målinger. Forventningsverdien μ er definert som gjennomsnittet når antall målinger er ekstremt mange, det vil si antallet går mot uendelig. s_n er beregnet standardavvik for gjennomsnittet $\bar{x}_n$, lik standardavviket til en måling delt på kvadratroten av antall målinger.

Grovfeil ved multippel t

Når vi estimerer en grovfeil, så vet vi at dersom det ikke er grovfeil i målingen, vil verdien vi beregner for grovfeilens størrelse ∇ normalt bli liten. Når det ikke er grovfeil til stede blir $\mu = E\{\nabla\} = 0$ og ligning (1) kan skrives:

$$t = \frac{\nabla}{s_\nabla} \tag{2}$$

Gradienttegnet i telleren (∇) betegnes «nabla», og er verdien vi har regnet ut for en mulig grovfeil. I nevneren står beregnet standardavvik for nabla. Hvis det ikke er grovfeil til stede vil t i formel (2) følge fordelingen til t i formel (1) Så vi tar en kontroll mot t-fordelingen. Er t i tallverdi mindre enn en grenseverdi aksepterer vi målingen, er t større i tallverdi har vi påvist en uteligger. Vi kaller det en uteligger og ikke grovfeil fordi vi opererer under usikkerhet.

Ved 5 % feilslutningssannsynlighet (signifikansnivå) vil vi få uteligger i en av 20 tester i gjennomsnitt når ingen grovfeil er til stede. Derfor bruker vi en mye lavere feilslutningssannsynlighet når det er mange tester, se [3] side 152. Men likevel, vi har ikke påvist en grovfeil før vi har kontrollert uteliggeren og funnet en årsak.

F-fordeling

F-fordeling kalles gjerne Fisher F-fordeling, Snedecors F-fordeling eller Fisher-Snedecor fordeling.

F-fordelingen kan utledes fra kjikvadratfordelingen. Har vi to kjikvadratfordelte verdier z_1 og z_2 med tilhørende antall overbestemmelser (frihetsgrader) f_1 og f_2, så er F-fordelingen definert ved:

$$F = \frac{\frac{z_1}{f_1}}{\frac{z_2}{f_2}} \tag{3}$$

En kjikvadratfordelt størrelse

Ved utjevningsregning brukes vekter. For vektingen innfører vi en størrelse kalt standardavviket på vektsenheten (sigma null) σ_0. En måling med standardavvik lik standardavviket på vektsenheten får da vekt 1. Feilkvadratsummen etter utjevning er lik $v^T \cdot P \cdot v$. Følgende størrelse er kjikvadratfordelt:

$$z = \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot v^T \cdot P \cdot v \tag{4}$$

Antall frihetsgrader for z i ligning (4) er lik antall overbestemmelser, som i elementutjevning - når ligningssystemet er bestemt er lik antall målinger minus antall ukjente element (parametere). Vi kan altså teste to feilkvadratsummer (eller varianser) mot hverandre i en F-test.

Grovfeiltest ved F-fordeling

Forutsetningen for at ligning 3 gir en F-fordelt verdi er at z_1 og z_2 er statistisk uavhengige. Vi tester derfor økningen i feilkvadratsum ved å ta inn flere målinger, mot den feilkvadratsummen der disse målingene ikke er med. De to feilkvadratsummene er uavhengige, Mathisen [2].

Når vi skal teste en satellittvektor kan vi regne en utjevning der vektoren er med og en utjevning der vi har fjernet vektoren. Vi får da to feilkvadratsummer.:

$$\begin{aligned} \Delta v^T \cdot P \cdot v &= v^T \cdot P \cdot v_{MED} - v^T \cdot P \cdot v_{UTEN} \\ \Delta f &= f_{MED} - f_{UTEN} \end{aligned} \tag{5}$$

I ligning (5) angir $_{MED}$ at vektoren er med og $_{UTEN}$ at vektoren er slettet fra måledataene. Δf er frihetsgradene til feilkvadratsumdifferansen.

Vi tester så differansen mellom de to feilkvadratsummene mot den feilkvadratsummen der vektoren ikke er med. For begge feilkvadratsummene er det samme sigma null, så den divideres bort. Under forutsetning av at det ikke er grovfeil til stede skal følgende størrelse være F-fordelt:

$$F = \frac{\frac{\Delta v^T \cdot P \cdot v}{\Delta f}}{\frac{v^T \cdot P \cdot v_{UTEN}}{f_{UTEN}}} \tag{6}$$

Multippel testing-formler

Formlene kan utledes med utgangspunkt i parameterutjevning, på norsk opprinnelig kalt elementutjevning. Parameterutjevning er grundig beskrevet både i Teunissen [5], Koch [4] og Revhaug [3]. Vi kan starte med følgende modell uten grovfeil. E står for forventning (expectation) og D for spredning (dispersion):

$$E\{l\} = A \cdot x \qquad D\{l\} = C \tag{7}$$

Ligningene (7) er de lineære observasjonsligningene, med lineariserte observasjoner l (konstantledd) og med variansmatrise C. Ligningene uttrykker at forventningsverdiene til konstantleddene l (i Teunissen [5] benevnt y) er lik designmatrise A multiplisert med parametrene (elementene) x. Spredningen til konstantleddene (observasjonene) er lik kovariansmatrisa C. For to observasjoner er C gitt ved:

$$C = \begin{pmatrix} Var(l_1) & Cov(l_1 l_2) \\ Cov(l_1 l_2) & Var(l_2) \end{pmatrix} \tag{8}$$

Observasjonene antas normalfordelte. Dette er ikke nødvendig for å bruke minste kvadraters metode, men forutsettes for testene i etterkant. For å ta hånd om målestøyen karakterisert ved C, innføres utjevningskorreksjonene v:

$$v = A \cdot x - l \tag{9}$$

Feilligningene (9) er utgangspunktet for parameterutjevning. Av ligningene (9) og (7) følger at forventningsverdien til v blir lik nullvektor :

$$E\{v\} = 0 \tag{10}$$

Minste kvadraters løsning fås ved å søke minimum for produktet $v^T \cdot P \cdot v$ der vektsmatrisa P (også ofte benevnt W) er lik den inverse av målingenes variansmatrise C, eventuelt skalert med variansen til vektsenheten σ_0^2.

For detaljert formelutvikling refereres til Revhaug [3] side 145 til 150. I [3] er det fokusert på tilfellet med én grovfeil, men formlene er generelle og kan brukes også når flere observasjoner testes samlet.

Ligning (9) utvides med ledd for grovfeil. For enkelhets skyld kan vi anta fire observasjoner, konstantledd $l_1 \ldots l_4$. Anta at målingene nr. 1 og nr. 3 inneholder kjente grovfeil, henholdsvis ∇_1 og ∇_3. Vi kan da generelt korrigere konstantleddene for grovfeilene ved å subtrahere:

$$\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \nabla_1 \\ 0 \\ \nabla_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \nabla_1 \\ \nabla_3 \end{pmatrix} = l - E \cdot \nabla \tag{11}$$

De korrigerte konstantledd innsettes i (9) og flyttes til venstre side:

$$l - E \cdot \nabla + \tilde{v} = A \cdot \tilde{x} \tag{12}$$

Ved at vi korrigerer for grovfeil får vi nye estimater for v og x. I det følgende vil «tilde» bli brukt for å skille mellom estimatene. Størrelser fra første utjevning uten estimering av grovfeil er uten «tilde», mens senere verdier der parametere for grovfeil estimeres, er med «tilde».

Vi kan bruke (12), ikke bare til å korrigere for kjente feil, men også til å estimere. Ved å velge forskjellige matriser E, kan vi prøve ut forskjellige kombinasjoner. Først gjennomføres en utjevning uten parametere for grovfeil, basert på ligningene (9). Ut fra resultatene fra denne utjevningen kan vi gjennomføre analysen. Det er et poeng kun å regne én utjevning og gjennomføre analysen basert på den. Minste kvadraters løsning for (12) gir nemlig :

$$\begin{aligned} Q_{\nabla\nabla} &= (E^T \cdot P \cdot Q_{vv} \cdot P \cdot E)^{-1} \\ \nabla &= -Q_{\nabla\nabla} \cdot E^T P \cdot v \end{aligned} \tag{13}$$

I (13) er matrisene Q vektskoeffisientmatriser. Tilhørende variansmatriser C blir $C = \sigma_0^2 \cdot Q$.

Vi trenger i ligning (13) vektskoeffisientmatrisen for de originale utjevningskorreksjonene v:

$$Q_{vv} = P^{-1} - A \cdot (A^T \cdot P \cdot A)^{-1} \cdot A^T \tag{14}$$

Ved å variere E kan alle ønskede kombinasjoner med tilhørende variansmatriser, regnes ut ved hjelp av ligningene (13). Ligningene (10) og (13) viser at $E\{\nabla\} = 0$ når observasjonene er normalfordelte, uten grovfeil.

For testing i de tilfeller der det estimeres gruppevis og Fisher F skal brukes trengs endringen i feilkvadratsummen. I følge Revhaug [3] er:

$$v^T \cdot P \cdot v - \tilde{v}^T \cdot P \cdot \tilde{v} = l^T \cdot P \cdot Q_{vv} \cdot P \cdot E \cdot \nabla \quad (15)$$

Ved multippel t-test hvor kun en måling testes om gangen trengs standardavviket for estimert verdi for ∇. I følge Revhaug [3]:

$$\tilde{s}_0^{\,2} = \frac{1}{f-1} \cdot \left(v^T \cdot P \cdot v - \frac{\nabla^2}{Q_{\nabla\nabla}}\right) \quad (16)$$

Man bruker gjerne betegnelsen s_0 i stedet for σ_0, for å markere at det dreier seg om en estimert verdi.

Eksempel

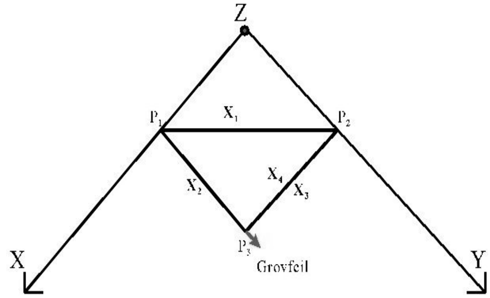
I det følgende står et eksempel. Det følgende understrekes: Multippel t-test forutsetter at en og en observasjon kan testes uavhengig av de andre observasjonene. Det vil si man leter etter en grovfeil i en observasjon alene. Denne forutsetningen svikter hvis en grovfeil blir fordelt på flere observasjoner. Typisk er det at ved multippel t, vil to eller flere grovfeil i samme størrelsesorden kunne skjule hverandre.

Det skal i eksempelet vises at en grovfeil i en vektorkomponent fordeler seg på øvrige vektorkomponenter og ødelegger for multippel t-test ved rotasjon av aksesystemet. Ved omregning fra vektor til retningsvinkel, avstand og høydeforskjell eller senitdistanse vil vi måtte regne med at feil i vektoren vil fordele seg mer eller mindre på alle de tre avledede størrelsene. Derfor er det avgjørende hvor man tester.

Ved testing av flere størrelser samtidig reduseres antall frihetsgrader og testen svekkes. Når det må forventes at flere observasjoner, som de tre vektorkomponentene er kontaminerte, vil jeg uansett våge påstanden at en samlet test basert på endring i feilkvadratsum er å foretrekke.

Praktisk forsøk

I figur 1 vises en grovfeil på vektoren P1 til P3 (pil ved P3). For å gjøre regningen enklere er z-verdiene satt lik null. Det påvirker ikke analysene. I simuleringen genereres normalfordelte feil på vektorene. (Det er tilfeldige feil også på z, så verdiene blir ikke eksakt



Figur 1 Et tredimensjonalt aksesystem med x, y og z akser sett i x y planet. Det er en målt en trekant med hjørnepunkter P1, P2 og P3. Fire vektorer er simulert, x_1 til x_4.

null.) I en trekant er det tre overbestemmelser (1 vektor). For å styrke nettet innføres en ekstra målt vektor mellom punktene P2 og P3. Grovfeilen er på åtte ganger standardavviket til de tilfeldige feil. For formler og utledninger se Revhaug [3].

Multippel t for hvert vektorelement

$$\text{nab} = \begin{bmatrix} 0.0086 \\ -0.0622 \\ 0.0101 \\ -0.0086 \\ 0.0622 \\ -0.0101 \\ -0.0049 \\ -0.0243 \\ 0.0144 \\ 0.0106 \\ -0.0172 \\ -0.0077 \end{bmatrix} \qquad t = \begin{bmatrix} 0.29 \\ -6.06 \\ 0.34 \\ -0.29 \\ 6.06 \\ -0.34 \\ -0.20 \\ -1.12 \\ 0.62 \\ 0.45 \\ -0.75 \\ -0.32 \end{bmatrix}$$

Figur 2 Estimerte grovfeil i nab og tilhørende testverdier i t

Første test gjøres før aksesystemet roteres. Der er vektorkomponentene Δx, Δy og Δz som testes.

Beregningen er utført i MathCad. Listen med estimerte grovfeil (nab) og beregnede verdier for t (t) står i figur 2.

Original grovfeil med størrelse 0,08 er påført y- komponenten til vektor 2. Estimert verdi er 0.0622. Avviket skyldes de tilfeldige feil. Samme feil med motsatt fortegn kommer i y-komponenten til vektor 1. Det er forsåvidt korrekt. Det er ingen kontroll som kan avgjøre om det er vektor 1 eller 2 som er feil. Testen peker på begge mulighetene.

Kvantilverdi for t for påvisning av uteligger (totalt 5% i 12 tester) er lik 5,03 og beregnet grovfeilverdi er større, så uteligger er påvist.

F-test vektorvis

$$\mathrm{Nab} = \begin{bmatrix} -0.0086 \\ 0.0622 \\ -0.0101 \end{bmatrix} \qquad F := \frac{\dfrac{\Delta vv_1}{3}}{\dfrac{vv_1 - \Delta vv_1}{6-3}} \qquad F = 11.503$$

Figur 3 Estimerte grovfeil i Nab og testverdi for Fisher F for vektor 2. Vektor 1 får tilsvarende verdier. Samme F. Samme verdier i Nab, men med motsatte fortegn.

I figur 3 står resultatene ved bruk av F-test på vektoren. I Nab står vektor 2 sine estimerte grovfeil, det blir nøyaktig de samme verdier som i figur 2. Dette er et spesialtilfelle. På grunn av testens utforming blir estimerte verdier for nablaene uavhengige.

Kvantilverdi for forkastning er regnet til 9,03 for Fisher F. Det er brukt 5 % feilslutningssannsynlighet. Det kan forsvares siden testene blir avhengige. Skjerpes testen (totalt 5% i 4 tester) blir forkastningsgrensa 24,88 og grovfeilen avdekkes ikke. At testen blir svakere enn multippel t skyldes redusert antall frihetsgrader. Tre målinger (vektorelement) er tatt ut mot kun ett element ved t-test. Her er det få overbestemmelser og effekten blir derfor stor. I et nett med flere overbestemmelser betyr dette mindre.

Med roterte akser

Så kommer vi til selve testen. Med aksesystemet plassert som i figur 1 er situasjonen optimal for multippel t. Den mest ugunstige situasjon for multippel t er ved å rotere x- og

$$\mathrm{nab} = \begin{bmatrix} -0.0379 \\ -0.0501 \\ 0.0101 \\ 0.0379 \\ 0.0501 \\ -0.0101 \\ -0.0207 \\ -0.0137 \\ 0.0144 \\ -0.0046 \\ -0.0196 \\ -0.0077 \end{bmatrix} \qquad t = \begin{bmatrix} -1.56 \\ -2.57 \\ 0.34 \\ 1.56 \\ 2.57 \\ -0.34 \\ -0.92 \\ -0.59 \\ 0.62 \\ -0.19 \\ -0.87 \\ -0.32 \end{bmatrix}$$

Figur 4. Multippel t når aksene er rotert 50 gon

y-aksene 50 gon om z-aksen. x-aksen vil da gå igjennom P_3 og y-aksen vil ligge horisontalt mot høyre i figur 1.

Tallene for multippel t i det minst gunstige tilfellet står i figur 4. Grovfeilen er nå fordelt på x- og y-komponentene til vektoren, og multippel t påviser ingen uteligger. Verdiene i t faller kraftig analogt med en situasjon der to grovfeil opptrer sammen. Verdiene i nab er ikke så kraftig redusert.

$$\mathrm{Nab} = \begin{bmatrix} 0.0379 \\ 0.0501 \\ -0.0101 \end{bmatrix} \qquad F := \frac{\dfrac{\Delta vv_1}{3}}{\dfrac{vv_1 - \Delta vv_1}{6-3}} \qquad F = 11.503$$

Figur 5. F-test. Aksene er rotert 50 gon.

I figur 5 står resultatene for F-test. Som vi ser er det de samme estimerte grovfeil for vektoren som i figur 4, linje 4 til 6 i Nab. Dette skyldes uavhengighet og gjelder absolutt ikke generelt. Derimot gjelder følgende generelt: Når vi tester hele vektoren er testen invariant for fordeling av en grovfeil på de forskjellige vektorelementene. Vi får samme beregnede verdi for F.

I figur 6 vises et komplett sett med formler med numerisk eksempel:

$$Q_{Nab} := \left(E^T \cdot PQP \cdot E\right)^{-1} \qquad Q_{Nab} = \begin{bmatrix} 1.667 & 0 & 0 \\ 0 & 1.667 & 0 \\ 0 & 0 & 1.667 \end{bmatrix}$$

$$Nab := -Q_{Nab} \cdot E^T \cdot Pv$$

$$\Delta vv := -v^T \cdot P \cdot E \cdot Nab \qquad Nab = \begin{bmatrix} -0.0138 \\ -0.0206 \\ 0.0144 \end{bmatrix}$$

$$vv - \Delta vv = 0.00127 \qquad \Delta vv = 0.00049$$

$$F := \frac{\frac{\Delta vv_1}{3}}{\frac{vv_1 - \Delta vv_1}{6-3}} \qquad F = 0.391$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Figur 6. En komplett beregning av en F-test av en vektor i MathCad. Matrisen E bestemmer hvilken satellittvektor som testes. (Her vektor nr. 3). For å gjennomføre testen trengs to matriser PQP og Pv. Dette er de samme to matrisene vi normalt har som utgangspunkt for multippel t test.

Konklusjon

En test må tilpasses. Søker vi en grovfeil som er knyttet til en enkelt måling er en estimering av grovfeilen og en test med Students t grei nok. Det lar seg også gjøre å bruke F-test på en og en måling. Det blir likeverdig med multippel t . Er det derimot slik at en grovfeil kan bli fordelt utover flere «målinger», det være seg vektorelementer eller avledede størrelser som retningsvinkel, avstand og høydeforskjell, så bør alle målinger der feilen kan forventes å ha «gjemt seg» testes som en gruppe. I multippel t vil en fordeling av en grovfeil på to eller flere avledede observasjoner medføre at feilkomponentene skjuler hverandre.

Den praktiske ulempen med å teste en gruppe i stedet for observasjonene enkeltvis, er tap av frihetsgrader. I nett med få overbestemmelser blir dette merkbart og det reduserer teststyrken.

I tillegg til enkeltvis testing av observasjoner med multippel t, anbefales å gjennomføre en testing av satellittvektorer med en F-test.

Litteratur:

[1] Høyland, Arnljot. Sannsynlighetsregning og statistisk metodelære, Tapir forlag. 1972 - 1973. Del I 171 sider Del II 222 sider.

[2] Mathisen, Olav. Beregnings- og testmetoder i det norske 1. ordens nett. Kart og Plan 1973. sidene 198-206.

[3] Revhaug, Inge. Feillære og utjevningsregning. Landbruksbokhandelen. 1993. 179 sider.

[4] Koch, Karl-Rudolf. Parameter Estimation and Hypothesis Testing in Linear Models. Springer Verlag, 1987. 378 sider.

[5] Teunissen, P. J. G. Adjustment theory an introduction. Delft University Press, 2000. 193 sider.