

Lokale koordinater med minimal fortegnning

Leif Kahl Kristensen

Leif Kahl Kristensen: Local coordinates with minimal distortion.

KART OG PLAN, Vol. 70, pp. 130–132, P.O.B. 5003, NO-1432 Ås, ISSN 0047-3278

Maps with minimal distortion are advantageous for construction sites with large buildings or constructions. The article presents a method to compute local coordinates with minimal distortion directly from UTM coordinates. This method exemplifies the use of complex analytic functions for conformal mapping. The coordinates in the UTM system may be transformed in three easy steps. The editorial office has checked the projection and find it works well. In the era of computers a local Gaussian projection may be used as well, but requires considerably more computing.

Key words: Local Gaussian projection, minimal map distortion, Local Transverse Mercator

Leif Kahl Kristensen: mag. scient. Department of Physics and Astronomy, Aarhus University, Ny Munkegade 120, DK-8000 Aarhus C. E-mail: LKK@PHYS.AU.DK

Landsdækkende koordinater kræver nødvendigvis større eller mindre korrektioner af længder. Moderne byggeri kan imidlertid kræve målestoksforholdet 1:1 og derfor et lokalt system. I konforme (vinkeltro) projektioner er det lokale kortbillede ligedannet med forholdene i marken. Et system af lokale koordinater (x, y) kan derfor defineres som de relative koordinater i forhold til et centralpunkt C divideret med målestoksforholdet i dette. Hvis det er hensigtsmæssigt, kan akserne drejes til byggeriets modulsystem og origo $(0, 0)$ passende forskydes. For UTM ændres målestoksforholdet imidlertid så meget, at sådanne lokale koordinater kun kan bruges indenfor 1–2 km.

For opgaver, der strækker sig over flere kilometer, må man indføre en lokal Gauss-Krüger eller Transverse Mercator (TM) projektion. Det har yderligere den fordel, at man helt kan undlade at bruge afstands- og retnings-korrektioner indenfor et større område. Vi skal her vise, hvor enkelt det kan gøres og illustrere ved den planlagte bro mellem Rødbyhavn med UTM koordinaterne $E = 651600$ m og $N = 6058800$ m og Puttgården med $(E, N) = (644600, 6042000)$.

Lad os vælge centralpunktet $(E_0, N_0) = (648100, 6050400)$ og betegne de relative koordinater i forhold hertil som (x, y) ¹. For Rødbyhavn er således $(x, y) = (+3500, +8400)$. Lad $A = E_0 - 500000 = 148100$ være central-

punktets E-koordinat regnet fra centralmeridianen 9° øst for Greenwich. De nye lokale koordinater (x', y') indføres herefter ved den simple transformation²:

$$x' = x - \frac{A}{2 \cdot R^2} \cdot (x^2 - y^2) \quad (1)$$

$$y' = y - \frac{A}{R^2} \cdot x \cdot y \quad (2)$$

Små ændringer (dx, dy) giver

$$(dx', dy') = \left(1 - \frac{A}{R^2} \cdot x, -\frac{A}{R^2} \cdot y\right) \cdot dx + \left(\frac{A}{R^2} \cdot y, 1 - \frac{A}{R^2} \cdot x\right) \cdot dy \quad (3)$$

De to vektorer, som her er faktor til henholdsvis dx og dy , er eksakt vinkelrette (ortogonale) og lige store. Det viser at transformationen er konform. Længden angiver målestoksforholdet:

$$1 - \frac{A}{R^2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{y}{R}\right)^2 \cdot \left(\frac{A}{R}\right)^2 + \dots \quad (4)$$

Det sidste led i denne rækkeudvikling er forsvindende.

Den elegante måde at behandle konforme afbildninger på er ved komplekse tal og skyldes C. F. Gauss (1777–1855). Indfør $z = x + iy$

1. (Red.) Her er x mot øst og y mot nord. Det blir motsatt av det som har vært vanlig brukt i Norge.

2. (Red.) R i formelen er redusert med UTM faktoren 0,9996 i forhold til middelkrumningsradien jf. (8).

og $z' = x' + iy'$, så er transformationen givet ved³

$$z' = z - \frac{A}{2 \cdot R^2} \cdot z^2 \quad (5)$$

Denne simple 2. grads ligning kan omvendt løses for z , men i praksis vil de to første led i en rækkeudvikling af løsningen være tilstrækkelig:

$$z = z' + \frac{A}{2 \cdot R^2} \cdot z'^2 + \frac{z'}{2} \cdot \left(\frac{z'}{R}\right)^2 \cdot \left(\frac{A}{R}\right)^2 + \dots \quad (6)$$

Målestoksforholdet i UTM er med god tilnærmelse det velkendte udtryk:

$$0.99960 \cdot \left(1 + \frac{(A+x)^2}{2 \cdot R^2}\right) \quad (7)$$

Heri er $R = 0.99960 \cdot K$ og K middelkrumningsradius for geografisk bredde φ :

$$K = 6378137 \cdot (1 - \cos 2\varphi/298.257) \text{ m.} \quad (8)$$

Da vi kun har behov for 3–4 cifre i R , kan vi for hele Danmark sætte $R \sim 6384000$ m, svarende til $\varphi = 56^\circ$. Multipliceres de to målestoksforhold (4) og (7) sammen fås målestoksforholdet i de lokale koordinater (x' , y'):

$$0.99960 \cdot \left(1 + \frac{A^2}{2 \cdot R^2} + \frac{x^2}{2 \cdot R^2}\right) \quad (9)$$

Dette er således sammensat af det konstante målestoksforhold i centralpunktet *plus* et lille variabelt bidrag fra en Gauss-Krüger projektion, hvis nord-akse er sammenfaldende med $E = E_0$ i UTM systemet. For eksemplet med $(x, y) = (+3500, +8400)$ bliver de små korrektioner ovenfor $(x'-x, y'-y) = (+0.106, -0.107)$ m. Bortdivideres målestoksforholdet 0.9998690 i C, for at opnå en nær 1:1 afbildning, og adderes dets UTM koordinater fås: (6 51600.565, 60 58800.994). For at undgå forveksling med UTM beholdes kun de sidste 8 cifre. De lokale koordinater for Rødbyhavn bliver derved:

$$(51600.565, 58800.994) \text{ m}$$

For Puttgarden fås tilsvarende:

$$(44599.647, 41998.792) \text{ m.}$$

Afstanden mellem disse punkter (regnet med Pythagoras) bliver herefter: 18 202.386 m. I disse punkter (med $|x| = 3500$) bliver målestoksforholdet $1 + 1.50E-7$ eller forvanskningen 0.150 mm/km. I midten bliver forvanskningen 0. Integreret med Simpson's formel, med vægtene 1, 4 og 1, fås i middel: $(1 \cdot 0.15 + 4 \cdot 0.0 + 1 \cdot 0.15)/6 = 0.05$ mm/km. For den 18.2 km lange linie bliver afstandskorrektionen således $-18.2 \cdot 0.05 = -0.9$ mm. Afstanden på ellipsoiden bliver herefter: $18\ 202.386 - 0.0009 = 18\ 202.385$. Dette resultat kan let efterprøves i UTM. Her er afstanden i planen 18 202.000 og målestoksforholdene henholdsvis 0.99988184, 0.99986898 og 0.99985642. Vægtet med 1, 4 og 1 fås i middel: 0.99986903 og afstanden $1820200.000/0.99986903 = 18202.384$, i overensstemmelse med ovenstående.

Beregningerne er tydeligt forenklet i det lokale system og korrektionerne kan ofte helt ignoreres. Dette er særlig tydeligt i forbindelse med retningskorrektionerne. Mellem enderne af den 18.2 km lange linie er disse kun 0.03". Når broen behøver ingeniører og teknikere således ikke at bekymre sig over forvanskninger i projektionen, men kan trygt betragte Jorden som helt flad.

Da akserne i det lokale system tangerer UTM nettet, er det drejet $1^\circ 52'$ i forhold til sand geografisk nord. Det er således ikke et sædvanligt lokalt Gauss-Krüger system orienteret efter sand nord. Drejningen har imidlertid den fordel, at koordinaterne (modulo 100 km) kun afviger få meter fra UTM. Det tillader den direkte anvendelse af topografiske kort og en grov orientering i de tekniske kort. Systemet er entydigt specificeret ved koordinaterne af centralpunktet, men hvis man ønsker at dreje og forskyde akserne til byggeriets modulsystem, må dette yderligere specificeres i «metadata».

Det her indførte system er det simpleste specialtilfælde af transformationer mellem to Gauss-Krüger systemer, som udføres di-

3. (Red.) Dette er en analytisk funktion og den avbilder konformt. En funktion $f(z)$ er sagt å være analytisk i et domene D dersom $f(z)$ er defineret og deriverbar i alle punkter i D . Ref. Erwin Kreyszig. Advanced engineering mathematics. 7 ed. John Wiley & Sons side 724.

rekte mellem koordinaterne uden brug af geografisk længde og bredde som mellemtrin. Betragtes områder, hvor den osculerende Gauss kugle giver en god tilnærmelse, er transformationen givet ved en meget simpel formel (nr. (1) i reference [1]). Lad centralinierne skære hinanden i polen P på Gauss kuglen (ikke nødvendigvis den geografiske Nordpol). Hvis vinklen CP på kuglen er 90°, fås vort simple specialtilfælde. Transformationen er også bestemt ved en analytisk fortsættelse af lokale målestoksforhold og drejninger.

En anden mulighed for at definere et lokalt system er ved:

$$z' = z - \frac{A}{2 \cdot R^2} \cdot z^2 - \frac{1}{12 \cdot R^2} \cdot z^3 \quad (10)$$

med målestoksforholdet $|dz'/dz|$ multipliceret på UTM forholdet fås:

$$0.99960 \cdot \left(1 + \frac{A^2}{2 \cdot R^2} + \frac{x^2 + y^2}{4 \cdot R^2}\right) \quad (11)$$

Dette er den såkaldte *stereografiske* projektion. Fordelen er mindre korrektioner og et cirkulært område. Simple udtryk kunne også her angives for retnings- og afstands-korrektionerne, men lad os antage, at de helt kan ignoreres. I afstanden 17 km fra C ændres koordinater kun 1 cm.

Referencer:

- 1] L.K.Kristensen: «Overgangen fra S34 til EUREF89». Landinspektøren (dansk) 43 (2006) nr. 2, maj, s. 71–74. <http://ida.dk/sites/ddl/forlagoskelmærker/tidsskrifter/sider/tidsskrift.aspx>

Notiser

Bent Brugård ny administrerende direktør i Norkart Geoservice AS

Bent Brugård er ansatt som administrerende direktør i Norkart Geoservice AS. Han avløser i august Knut Flåthen. Knut Flåthen har hatt en åremålskontrakt på tre år med Norkart Geoservice, hvor hans hovedoppgave var å få gjennomført en fusjon mellom Norkart AS og Geoservice AS og å etablere og operasjonalisere en helt ny organisasjonsstruktur. Dette er en oppgave han har løst meget tilfredsstillende.

Brugård var en av pionerene innen GIS på 80-tallet og har de siste 20 årene opparbeidet bred erfaring som leder av flere teknologiske selskaper, både børsnoterte selskaper og selskaper der Telenor har vært eier. Brugård kommer fra stillingen som partner i ledelsesrådgivningsselskapet Considium Consulting Group.

Brugård har de siste 10 årene ledet snuoperasjoner i børsnoterte og privat eide teknologiske selskaper. Han har blant annet hatt ansvaret for Data Respons, Conax, 1881 og Mobyson. På 90-tallet etablerte Brugård ledende Internett-

bedrifter som Telenor Online og Scandinavia Online. Tilbake på 80-tallet var han med på å starte opp Mapdat og Pumatec, to programvarebedrifter innen geografiske informasjonssystemer. Brugård er utdannet fra Universitetet for miljø- og biovitenskap på ÅS og har videreutdanning fra IMD i Sveits.

